V команда. **1.** Уравнение к задаче: $x^2-16=(x-1)(x-2)$; $x=6$. **2.** $x=-1$. **3.** -26.

VI команда. **1.** Уравнение к задаче: $n^2+65=(n+1)(n+2)$; $n=21$. **2.** $x=-1$. **3.** 6.

IV. Подведение итогов урока

1. Объявление команды-победительницы турнира.
2. Вопросы классу.
   — Чем мы занимались на уроке?
   — Понравилась ли вам такая форма проведения урока?

V. Домашнее задание

Повторить алгоритмы умножения одночлена на многочлен, многочлена на многочлен и решить задачу.

Задача. Длина прямоугольника на 3 см больше его ширины. Если длину уменьшить на 2 см, а ширину увеличить на 5 см, то площадь прямоугольника увеличится на 14 см^2. Найти начальные длину и ширину прямоугольника.

3. ОТКРЫТЫЙ УРОК ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА В 11 КЛАССЕ
(физико-математический профиль)

Тема. *Определенный интеграл, его геометрический смысл и применение.*

Цель: *обобщить знания и умения учащихся по данной теме; учить их аккуратному ведению записей, объективному оцениванию результатов своей и коллективной работы; развивать познавательный интерес учащихся, навыки коллективного труда, умение применять свои знания и навыки в новых ситуациях.*

Тип урока: *обобщение и систематизация знаний.*

Ход урока

I. Проверка домашнего задания и актуализация опорных знаний

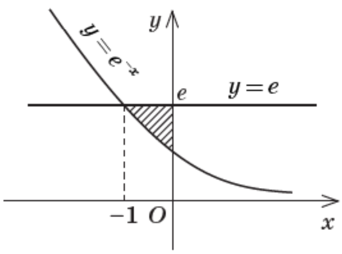
Учитель. Тема сегодняшнего урока для вас не новая. Мы решили достаточно много примеров на нахождение определенного интеграла и вычисление площадей с его помощью, но эти примеры были достаточно классического характера. Сегодня же мы поговорим о «подводных рифах» этой темы.

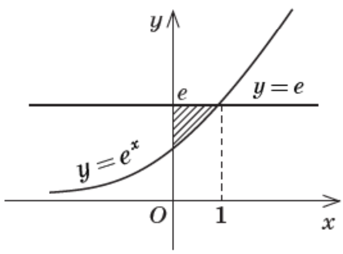
Предлагаю вам выполнить небольшую самостоятельную работу, которая позволит вспомнить о правилах нахождения интегралов, осознать степень правильности выполнения домашнего задания и проконтролировать уровень знаний.

Самостоятельная работа

I вариант	*II вариант*	
1. Возможно ли вычислить интеграл		
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos 2x}$	$\int\limits_{-3}^{1} \frac{dx}{x+2}$	*(2 балла)*
2. Вычислить интеграл		
$\int\limits_0^{\pi} \sin^2 3x dx$	$\int\limits_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{3} dx$	*(2 балла)*
3. Вычислить интеграл		
$\int \frac{\ln^3 x dx}{x}$	$\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	*(2 балла)*

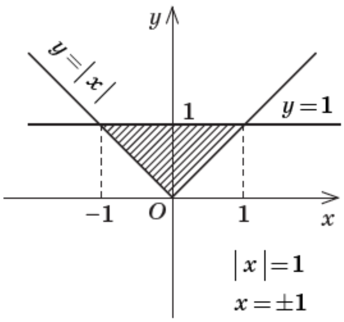
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

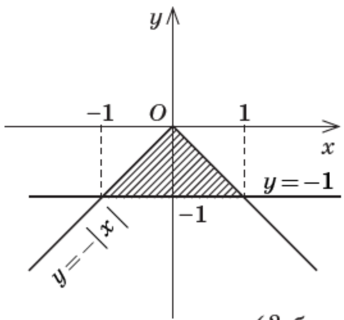




(3 балла)

5.





(3 балла)

После самостоятельной работы учащиеся проверяют правильность ее выполнения по записям, заранее сделанным на доске, и производят самооценку.

Ответы и решения к самостоятельной работе

I вариант

1. Нет, так как $\cos 2x \neq 0$, $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ и функция не является непрерывной на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. $$\int_0^{\pi} \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{6}\sin 6\pi\right) - 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

3. $$\int \frac{\ln^3 x dx}{x} = \left|\begin{matrix} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right. = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

4. $y = e^{-x}$ $\quad y = e \quad x \quad y$
$e^{-x} = e$; $-x = 1$; $x = -1$.
$$S = \int_{-1}^{0}\left(e - e^{-x}\right)dx = \left(ex + e^{-x}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = e^0 - (-e + e) = 1.$$

5. $$S = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = 1 \text{ или } S = 2\int_0^1(-x+1)dx = 2\left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^1 =$$
$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

II вариант

1. Нет, так как подынтегральная функция не является непрерывной на $[-3; 1]$.

2. $$\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1 + \cos\frac{2}{3}x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - 0 =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \; = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3. $$\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left|\begin{matrix} t=\arcsin x \\ dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\end{matrix}\right. = \; = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

4. $S=\int_0^1\left(e-e^x\right)dx=\left(ex-e^x\right)\Big|_0^1=(e-e)-\left(0-e^0\right)=1$.

5. $S=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\right)=1$ или $S=2\int_0^1(1-x)dx=2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=$

$=2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}=1$.

II. Решение нестандартных заданий

Учитель. При изучении определенного интеграла и его свойств нельзя формально подходить к вычислению интегралов. (Впрочем, такой подход вреден при изучении любого раздела математики.) Поэтому прежде чем взять интеграл, нужно убедиться, что на отрезке интегрирования непрерывна подынтегральная функция.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Вычисляя $\int_0^1\frac{dx}{x-2}$ и $\int_0^3\frac{dx}{x-2}$, учащийся нашел, что

$\int_0^1\frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|\Big|_0^1=\ln|-1|-\ln|-2|=-\ln2$

и $\int_0^3\frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|\Big|_0^3=\ln1-\ln|-2|=-\ln2$.

То есть $\int_0^1\frac{dx}{x-2}=\int_0^3\frac{dx}{x-2}$. Верны ли эти равенства? Если нет, то в чем заключается ошибка?

Ответ: $\int_0^3\frac{dx}{x-2}$ вычислить нельзя, так как подынтегральная функция не является непрерывной на $[0;3]$.

2. При каких значениях пределов интегрирования существует $\int_a^b\frac{dx}{x}$?

Ответ: $\begin{cases}a>0,\\b>0\end{cases}$ или $\begin{cases}a<0,\\b<0.\end{cases}$

Вывод: определение интеграла не позволяет нам говорить об интеграле, если функция не является непрерывной на промежутке интегрирования.

Учитель. Теперь предлагаю выполнить еще несколько заданий.

3. Вычислить $\int_0^2\sqrt{(x+2)^2}dx$.

$$\int_{-2}^{2}\left(3+\sqrt{4-x^2}\right)dx=S_{ABCD}+S_{\text{полукруга}}=3\cdot 4+\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=2\pi+12.$$

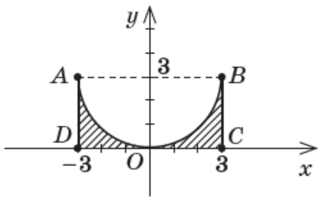
Ответ: $2\pi+12$.

8. Вычислить $\int_{-3}^{3}\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)dx$.

Решение

График функции $y=-\sqrt{9-x^2}$ — полуокружность с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом 3, расположенная под осью абсцисс.

А поскольку функция $y=3-\sqrt{9-x^2}$ подынтегральная, то полуокружность поднята на три единицы вверх (рис. 5).



$ABCD$ — прямоугольник;
$AB=6$, $BC=3$.

Рис. 5

$$S=\int_{-3}^{3}\left(3-\sqrt{9-x^2}\right)dx=S_{ABCD}-S_{\text{полукруга}}=6\cdot 3-\frac{\pi\cdot 9}{2}=18-4{,}5\pi.$$

Ответ: $18-4{,}5\pi$.

III. Подведение итогов урока

Учитель. Вы хорошо поработали сегодня над решением нестандартных заданий. Надеюсь, все убедились в том, что понимание геометрического смысла интеграла помогает не только вычислять площадь различных фигур, но и находить числовые значения тех интегралов, вычисление которых выполнить по известным формулам не удается.

IV. Домашнее задание

1. Выполнить задания по пособию М. М. Сканави. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. № 15.273; 15.260. (М. Высшая шк., 1989).
2. Вычислить: 1) $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$; 2) $\int_{-3}^{3}\left|\left|x\right|-2\right|dx$.

4. ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ В 5 КЛАССЕ

Цель: *развивать логическое мышление, смекалку и сообразительность учащихся в нестандартных ситуациях; развивать интерес к математике, ее истории, чтению дополнительной литературы; учить математически грамотной речи, отстаивать свою точку зрения; воспитывать целеустремленность.*

Оборудование: *для жюри: стол, бумага, ручки; таблички с оценками от 1 до 4 (каждому члену жюри); для подсчета баллов: бумага, ручка, калькулятор, стол, стул, два табло (типа спортивных); для ведущего: мяч, секундомер; для команд: 2 стола и 7 стульев (для каждой команды), по два плаката для заданий № 2 и 4 этапа разминки.*

Методические рекомендации

За неделю до турнира состав команд должен быть определен. Команды получили следующие домашние задания.

1. Подготовить цифры от 1 до 4, нарисованные на плотной бумаге размером с тетрадный лист.
2. Приготовить плакаты для болельщиков.
3. Придумать название команды, ее девиз и эмблему.
4. Подготовить от болельщиков по одному номеру художественной самодеятельности: а) связанному с математической тематикой; б) на любую тему.
5. Придумать по три вопроса команде-сопернице и подготовить ответы на эти вопросы. (Вопросы должны быть связаны с математикой.)
6. Команды формируются из учеников пятых классов и должны быть равными по количеству и «по силам», т. е. по уровню подготовки. Целесообразно создавать команды, состоящие из семи человек. Один из участников — капитан команды.
7. В состав жюри можно включить двух старшеклассников, которые увлекаются математикой, завуча-организатора и директора школы.

   Среди членов жюри не должно быть классных руководителей команд — участниц турнира, а также их учителя математики.
8. Ведущим может быть кто-то из старшеклассников.
9. Следует обязательно обратить внимание на четкость организации при подготовке и проведении турнира. От этого зависит успех всего мероприятия.