3. $v(t)=t^3+3t^2+2$; $v(2)=2^3+3\cdot 2^2+2=8+12+2=22$ (м/с);
$a(t)=3t^2+6t$; $a(2)=3\cdot 2^2+6\cdot 2=12+12=24$ $\left(\text{м/с}^2\right)$.

4. $f(0)=1$; $f'(x)=-4x^3+2x-3$;
$f'(0)=-3$; $f'(-1)=-4\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)-3=4-2-3=-1$;
$-1+(-3)=-4\cdot 1$; $-4=-4$ (истинное).

5. $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f(x_0)=f(1)=1^2\cdot e^{-1}=\dfrac{1}{e}$;
$f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$;
$f'(x_0)=f'(1)=2\cdot 1\cdot e^{-1}-1^2\cdot e^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$; $y=\dfrac{1}{e}(x-1)+\dfrac{1}{e}$; $e=\dfrac{1}{e}x$.

# ТЕМА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

## УРОК 13

**Тема:** Возрастание и убывание функции.
**Цель:** Ознакомление учащихся с правилами нахождения промежутков возрастания и убывания функции, связью между производной и поведением функции.
**Оборудование:** Таблица, кодоскоп, планшеты.

### Ход урока

**I. Организационный момент**

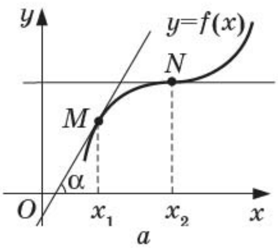
**II. Анализ результатов тематической контрольной работы № 1**

Учитель анализирует результаты контрольной работы, выставляет оценки в журнал.

Учащиеся выполняют задания, аналогичные тем, в которых были допущены ошибки.

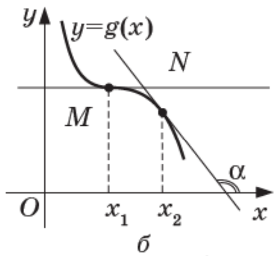
## III. Восприятие и осознание нового материала

### *Признаки возрастания и убывания функции на некотором промежутке*



а

Рассмотрим касательные к графику возрастающей функции $y=f(x)$ (см. рис. *а*), проведенные в точках с абсциссами $x_1$ и $x_2$. В точке $x_1$ угол $\alpha$ — острый, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $k=f'(x_1)>0$. В точке $x_2$ $k=0$, поскольку касательная параллельна оси $Ox$, т. е. $k=f'(x_2)=0$. Значит, $f'(x)\geqslant 0$, если $y=f(x)$ возрастает.



б

Рассмотрев график убывающей функции $y=g(x)$ (см. рис. *б*), аналогично придем к выводу, что $k\leqslant 0$ в точках $x_1$ и $x_2$ соответственно, поскольку касательная параллельна оси $Ox$ в точке $x_1$ и $\alpha$ — тупой угол в точке $x_2$. Итак, $f'(x)\leqslant 0$, если функция $y=f(x)$ убывает.

Учитель предлагает ознакомиться с материалом учебника ([1]: § 15, с. 88, 89) и пособия ([2]: табл. 27) самостоятельно.

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют ***промежутками монотонности функции***.

Для практики очень важно, что справедливы также и обратные теоремы, показывающие, как по знаку производной можно установить характер монотонности функции на промежутке. При этом, чтобы не возникло несоответствие, берут только открытые промежутки — интервалы, или открытые лучи.

**Теорема 1 (обратная).** Если в каждой точке открытого промежутка $(a;b)$ выполняется неравенство $f'(x)\geqslant 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком промежутке $[m;n]$ интервала $(a;b)$), то функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке $(a;b)$.

**Теорема 2 (обратная).** Если в каждой точке открытого промежутка $(a;b)$ выполняется неравенство $f'(x)\leqslant 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком непрерывном промежутке $[m;n]$ с интервалом $(a;b)$ ), то функция $y=f(x)$ убывает на промежутке $(a;b)$ .

Исследовать функцию на монотонность означает выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких — убывает. Согласно теоремам 1 и 2 это связано со знаком производной.

Завершая объяснение об исследовании функции на монотонность, следует обратить внимание учащихся на следующее обстоятельство: если на промежутке $(a;b)$ выполняется неравенство $f'(x)>0$ , то функция $y=f(x)$ возрастает на промежутке $(a;b)$ , если $f'(x)<0$ , то $y=f(x)$ убывает на $(a;b)$ .

А что произойдет, если на промежутке $(a;b)$ $f'(x)=0$ ? Вероятно, функция $y=f(x)$ не является ни возрастающей ни убывающей.

Что это за функция? Ответ очевиден: $y=C$ (константа, или постоянная величина).

**Теорема 3.** Если в каждой точке некоторого интервала $(a;b)$ выполняется равенство $f'(x)=0$ , то функция $y=f(x)$ постоянна на этом промежутке.

Учитель предлагает рассмотреть таблицу ([2]: табл. 74.) и рассмотреть несколько примеров.

***Пример 1.*** Доказать, что функция $f(x)=x^7+4x^3-11$ возрастает на всей числовой прямой.

*Решение*

$f'(x)=7x^6+12x^2$ . Для всех $x\in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $f'(x)\geqslant 0$ , поскольку $7x^6+12x^2\geqslant 0$ при $x\in \boldsymbol{R}$, причем $f'(x)=0$ только в одной точке $x=0$ . Значит, согласно теореме 1, функция $y=f(x)$ возрастает.

***Пример 2.*** Доказать, что функция $y=9\cos x+\sin 2x-18x$ убывает на всей числовой прямой.

*Решение*

$y'=9\cdot(-\sin x)+\cos 2x\cdot 2-18=-9\sin x+2\cos 2x-18$ .

$-9\sin x \leqslant 9$, $2\cos 2x \leqslant 2$, тогда $-9\sin x + 2\cos 2x \leqslant 11$.

Значит, $-9\sin x + 2\cos 2x - 18 \leqslant -7$. $-9\sin x + 2\cos 2x - 18 < 0$.

Это неравенство выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, согласно теореме 2, функция убывает на всей числовой прямой.

***Пример 3.*** Решить уравнение $9\cos x + \sin 2x - 18x = x^3 + 9$.

*Решение*

Как было доказано в примере 2, функция $y = 9\cos x + \sin 2x - 18x$ — убывающая. Функция $g = x^3 + 9$ — возрастающая, поскольку $g'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ для $x \in \boldsymbol{R}$, а $g'(x) = 0$ в точке $x = 0$ — только одной. Имеет место теорема 2 о корне уравнения ([2]: табл. 43). Тогда уравнение $y = g(x)$ имеет один корень, который легко подобрать: $x = 0$. Действительно, $9\cos 0 + \sin(2 \cdot 0) - 18 \cdot 0 = 0^3 + 9$; $9 = 9$ — истинное.

*Ответ*: 0.

***Пример 4.*** Исследовать функцию $y = 4x^3 + 6x^2 - 8$ на монотонность.

*Решение*

1) $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2) $y' = 12x^2 + 12x = 12x(x+1)$.

3) $12x(x+1) > 0$, если $x(x+1) > 0$.

$12x(x+1) < 0$, если $x(x+1) < 0$.

Решим каждое из неравенств методом интервалов:

$g(x) = x(x+1)$; $D(g) = \boldsymbol{R}$.

нули: $g(x) = 0$, $x(x+1) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.


$g(x) > 0$, если $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (0; +\infty)$;

$g(x) < 0$, если $x \in (-1; 0)$.

Итак, функция $y = 4x^3 + 6x^2 - 8$ возрастает, если $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (0; +\infty)$, убывает, если $x \in (-1; 0)$.

*Ответ*: $(-1; 0)$ — интервал убывания функции, $(-\infty; -1)$ и $(0; +\infty)$ — интервалы возрастания.

## IV. Первичное применение знаний

**Выполнение упражнений**

[1]: упражнение № 47 (1, 3, 4, 6, 7).

Несколько учащихся выполняют задание возле доски, остальные — самостоятельно в тетрадях.

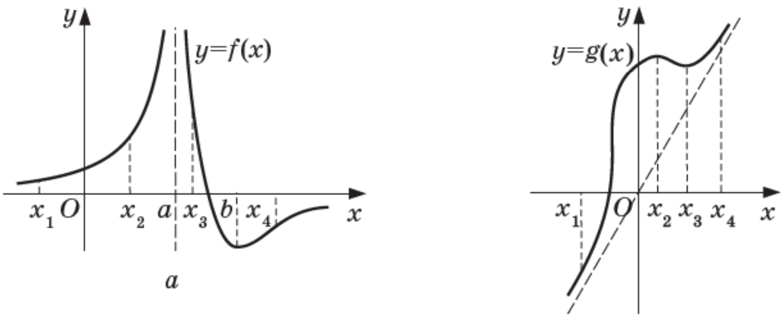
## V. Итог урока

Учитель обращает внимание учащихся на то, что, пользуясь графиком функции, можно определить знак производной, а пользуясь графиком производной,— поведение функции.

**Блицопрос**

Опрос осуществляется по готовым рисункам. Учащиеся отвечают на планшетах.

1. Какой знак имеет производная функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, графики которых изображены на рис. *а* и *б*, в точках с абсциссами $x_1$; $x_2$; $x_3$; $x_4$?



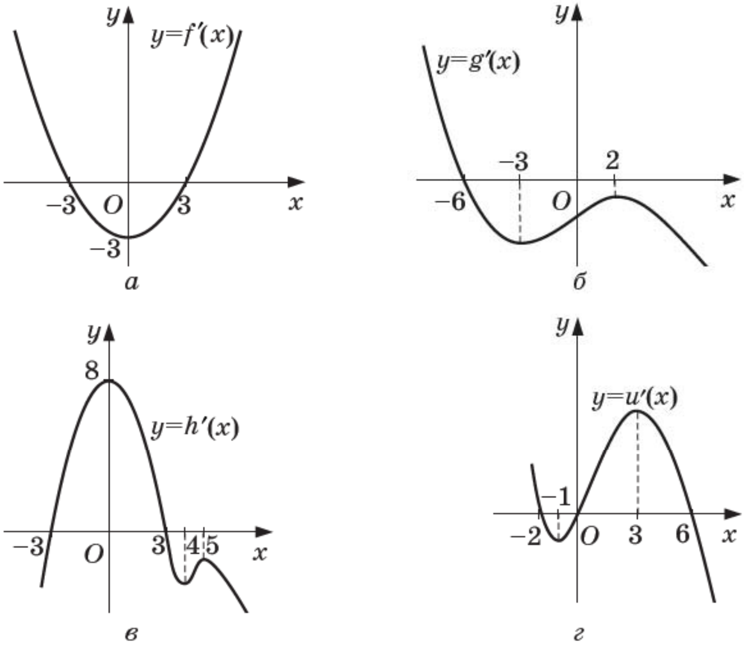

*а* *б*

2. Укажите интервалы возрастания и убывания функций $f(x)$ и $g(x)$.

3. На рис. *а*, *б*, *в*, *г* (см. с. 103) изображены графики производных функций $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=u(x)$. Укажите промежутки возрастания и убывания каждой из данных функций.

*Ответы к заданиям блицопроса*

1. $f'(x_1)>0$, $f'(x_2)>0$, $f'(x_3)<0$, $f'(x_4)>0$;
$g'(x_1)>0$, $g'(x_2)=0$, $g'(x_3)=0$, $g'(x_4)>0$.




2. $f(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty; a)$ и $x \in (b; +\infty)$; убывает, если $x \in (a; b)$;

$g(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty; x_2)$ и $x \in (x_3; +\infty)$; убывает, если $x \in [0; +\infty)$.

3. $f(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty; -3)$ и $x \in (3; +\infty)$; убывает, если $x \in (-3; 3)$;

$g(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty; -6)$; убывает, если $x \in (-6; +\infty)$;

$h(x)$ возрастает, если $x \in (-3; 3)$; убывает, если $x \in (-\infty; -3)$ и $x \in (3; +\infty)$;

$u(x)$ возрастает, если $x \in (-\infty; -2)$ и $x \in (0; 6)$; убывает, если $x \in (-2; 0)$ и $x \in (6; +\infty)$.

## VI. Домашнее задание

[1]: § 15 (выборочно), упражнения № 47 (8, 11—13); конспект;
[2]: табл. № 27, 73, 74.