ВАРІАНТ 1

Перша і друга частини

1. Г. **2.** Г. **3.** В. **4.** Б. **5.** Б. **6.** Г. **7.** Г. **8.** В. **9.** В. **10.** 1 – Б, 2 – Г, 3 – А.

11. 1 – В, 2 – Б, 3 – А. **12.** $7{,}8 \leqslant 4x - 0{,}1y \leqslant 16{,}3$. **13.** $\frac{1}{n-6}$. **14.** 384.

Третя частина

15. Нехай початкова ціна одного стільця x грн, а одного стола y грн. Тоді за 2 столи й 3 стільці заплатили $3x + 2y = 1340$ (грн). Після зміни цін стіл став коштувати $0{,}9y$, а стілець — $0{,}8x$ грн, отже, за один стіл і 2 стільці заплатили $0{,}9y + 2 \cdot 0{,}8x = 648$ (грн).

Отримали систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 2y = 1340, \\ 1{,}6x + 0{,}9y = 648; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 2y = 1340 \,|\cdot(-9), \\ 1{,}6x + 0{,}9y = 648 \,|\cdot 20; \end{cases}$

$$+\begin{cases} -27x - 18y = -12060, \\ 32x + 18y = 12960; \end{cases}$$
$$5x = 900;$$
$$x = 180.$$

Отже, стілець коштував 180 грн, а стіл: $(1340 - 3 \cdot 180) : 2 = 400$ (грн).

Відповідь. 180 грн; 400 грн.

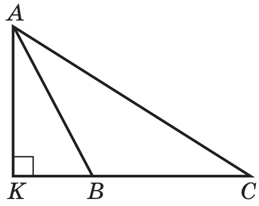
16. $\frac{3x+2}{18} - \frac{2x^2 - 1}{12} - \frac{2x-3}{4} \leqslant \frac{4}{9} \Big| \cdot 36$;

$2(3x+2) - 3 \cdot (2x^2 - 1) - 9 \cdot (2x - 3) \leqslant 16$; $6x + 4 - 6x^2 + 3 - 18x + 27 - 16 \leqslant 0$;

$6x^2 + 12x - 18 \geqslant 0$; $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -3. \end{array}\right.$

Відповідь. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

17. ABC — даний трикутник (див. рисунок), $AK \perp BC$, $AK = 6$, $KB = 2\sqrt{3}$. З $\triangle AKB$ $(\angle K = 90^\circ)$: $\operatorname{tg} \angle ABK = \frac{AK}{BK} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, тоді $\angle ABK = 60^\circ$, тому $\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. За умовою радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює $15\sqrt{3}$.



За наслідком з теореми синусів $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, тобто $\frac{AC}{2\sin 120^\circ} = 15\sqrt{3}$;

$AC = 30\sqrt{3} \cdot \sin(180^\circ - 60^\circ) = 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 45$.

Відповідь. 45.

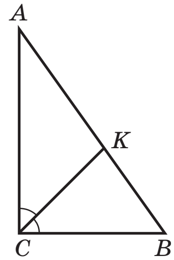
18. $|x+2|\geqslant 5-2x$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x+2\geqslant 5-2x;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-2,\\ -x-2\geqslant 5-2x;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -2,\\ 3x\geqslant 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-2,\\ x\geqslant 7;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x\geqslant 1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-2,\\ x\geqslant 7;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\geqslant 1,\\ \varnothing;\end{array}\right.$

$x\in[1;+\infty)$.

Відповідь. $[1;+\infty)$.

19. $(p^2+4)(q^2+25)\geqslant 40pq$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$.
Скористаємося нерівністю Коші для чисел p^2 і 4, а потім для чисел q^2 і 25: $p^2+4\geqslant 2\sqrt{4p^2}$; $p^2+4\geqslant 4p$ $(p\geqslant 0)$; аналогічно $q^2+25\geqslant 2\sqrt{25q^2}$; $q^2+25\geqslant 10q$ $(q\geqslant 0)$. Тоді $(p^2+4)(q^2+25)\geqslant 4p\cdot 10q$; $(p^2+4)(q^2+25)\geqslant 40pq$, що й треба було довести.

20. ABC — даний прямокутний трикутник (див. рисунок), CK — бісектриса, $AK:KB=4:3$. $P_{\triangle ABC}=21\sqrt{2}$.



За властивістю бісектриси: $\frac{AC}{BC}=\frac{AK}{KB}=\frac{4}{3}$, тоді $AC=4x$; $BC=3x$, отже, за теоремою Піфагора $AB=5x$.

Оскільки $P=21\sqrt{2}$, то $3x+4x+5x=21\sqrt{2}$; $12x=21\sqrt{2}$; $x=\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

Отже, $AC=7\sqrt{2}$; $BC=\frac{21\sqrt{2}}{4}$; $AB=\frac{35\sqrt{2}}{4}$; $AK=\frac{35\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{7}=5\sqrt{2}$; $BK=\frac{35\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15\sqrt{2}}{4}$.

$CK^2=AC\cdot BC-AK\cdot KB=7\sqrt{2}\cdot\frac{21\sqrt{2}}{4}-5\sqrt{2}\cdot\frac{15\sqrt{2}}{4}=\frac{147}{2}-\frac{75}{2}=\frac{72}{2}=36$;

$CK=6$.

Відповідь. 6.

ВАРІАНТ 2

Перша і друга частини

1. Г. **2.** Б. **3.** Г. **4.** В. **5.** Б. **6.** Б. **7.** Б. **8.** Б. **9.** В. **10.** 1 – Г, 2 – А, 3 – В. **11.** 1 – В, 2 – Г, 3 – А. **12.** $[1;+\infty)$. **13.** –4; 1. **14.** $\sqrt{2}$.

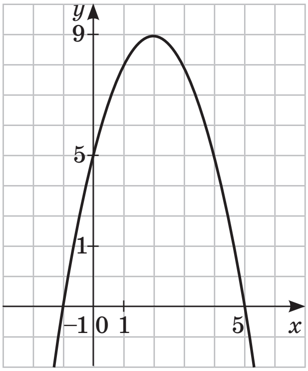
Третя частина

15. Нехай перший станок виготовляє за 1 год x деталей, а другий — y деталей $(x, y > 0)$. Оскільки за 8 год обидва станки виготовляють 2400 деталей, то за 1 год — 300 деталей, складаємо рівняння $x+y=300$. За 2 год перший і за 4 год другий станки виготовляють 720 деталей, тоді $2x+4y=720$. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=300, \\ 2x+4y=720; \end{cases}$ $-\begin{cases} x+y=300, \\ x+2y=360; \end{cases}$ $\begin{cases} y=60, \\ x=300-y; \end{cases}$ $\begin{cases} x=240, \\ y=60. \end{cases}$

Отже, перший станок виготовляє за годину 240 деталей, а другий — 60 деталей.

Відповідь. 240 деталей; 60 деталей.

16. Дана функція $y=5+4x-x^2$ квадратична, її графік — парабола, вітки якої напрямлені вниз. Координати вершини параболи: $x_0=\frac{-4}{-2}=2$; $y_0=5+8-4=9$; $(2;9)$.



Точки перетину з осями координат: з віссю Ox $(y=0)$: $5+4x-x^2=0$; $x^2-4x-5=0$; $\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-1; \end{array}\right.$ $(5;0)$, $(-1;0)$; з віссю Oy $(x=0)$: $y=5$, $(0;5)$. Будуємо графік (див. рисунок).

1) $y<0$, якщо $x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

2) Функція зростає на проміжку $(-\infty;2]$.

17. Дано вершини трикутника: $A(3;-1)$; $B(-5;7)$; $C(1;5)$, тоді $AC=\sqrt{(1-3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$, а довжина середньої лінії $KP=\frac{1}{2}AC=\sqrt{10}$.

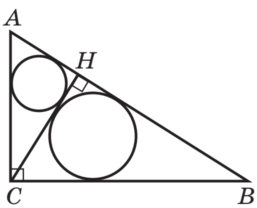
Відповідь. $\sqrt{10}$.

18. Квадратне рівняння $x^2+8x+10+3a=0$ має два різні корені, якщо дискримінант додатний, тобто коли $8^2-4\cdot(10+3a)>0$; $64-40-12a>0$; $12a<24$; $a<2$.

Відповідь. При $a<2$.

19. $x^2+\frac{36}{x^2}=\left(x-\frac{6}{x}\right)^2+12$. Найменшого значення цей вираз набуває, коли $x-\frac{6}{x}=0$; оскільки $\left(x-\frac{6}{x}\right)^1\geqslant 0$, і це значення дорівнює 12.
Відповідь. 12.

20. ABC — даний прямокутний трикутник (див. рисунок), $CH\perp AB$, $r_1=12$ — радіус кола, вписаного у трикутник ACH, $r_2=16$ — радіус кола, вписаного у трикутник BCH, нехай r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC.



Прямокутні трикутники ABC і BCH подібні за гострим кутом, тому $\frac{S_{\triangle BCH}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r_2^2}{r^2}$, аналогічно $\triangle ABC\sim\triangle ACH$, тому $\frac{S_{\triangle ACH}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r_1^2}{r^2}$. Додаючи отримані рівності та враховуючи, що $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCH}+S_{\triangle ACH}$, отримаємо: $\frac{S_{\triangle ACH}+S_{\triangle BCH}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=1$; $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}=\sqrt{12^2+16^2}=20$.

Відповідь. 20.

ВАРІАНТ 3

Перша і друга частини

1. Б. **2.** Б. **3.** В. **4.** Г. **5.** В. **6.** В. **7.** Б. **8.** В. **9.** Б. **10.** 1 – Г, 2 – В, 3 – Б. **11.** 1 – Г, 2 – Б, 3 – А. **12.** 37. **13.** $(-\infty;+\infty)$. **14.** $9\sqrt{3}$ см^2.

Третя частина

15. Нехай басейн наповнюється через першу трубу окремо за x год $(x>0)$, а через другу — за $(x+9)$ год. Через першу трубу за 1 год наповнюється $\frac{1}{x}$ частина басейна, а через другу — $\frac{1}{x+9}$ частина, тоді $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{6}$. ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -9.\end{cases}$ $6x+54+6x-x^2-9x=0$; $x^2-3x-54=0$; $\left[\begin{array}{l}x=9,\\ x=-6;\end{array}\right.$ $x=-6$ не задовольняє умову $x>0$. Отже, через першу трубу басейн можна наповнити за 9 год, а через другу — за 18 год.

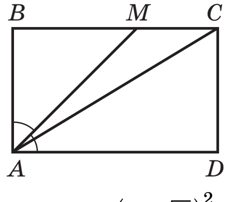
Відповідь. За 9 год, за 18 год.

16. За умовою $a_1=-80{,}4$; $a_2=-80{,}2$, тоді $d=-80{,}2-(-80{,}4)=0{,}2$. $a_n=a_1+d(n-1)=-80{,}4+0{,}2(n-1)$; $a_n<0$; $0{,}2(n-1)-80{,}4<0$; $0{,}2(n-1)<80{,}4$; $n-1<402$; $n<403$.
Отже, арифметична прогресія має 402 від'ємні члени.

$$S_{402}=\frac{2\cdot(-80{,}4)+0{,}2\cdot 401}{2}\cdot 402=\frac{-160{,}8+80{,}2}{2}\cdot 402=-16\,200{,}6.$$

Відповідь. $-16\,200{,}6$.

17. $ABCD$ — даний прямокутник (див. рисунок), AM — бісектриса кута A; $BC=24$ см, $AM=10\sqrt{2}$ см. За умовою $\angle BAM=\angle MAD$; $\angle BMA=\angle MAD$ як внутрішні різносторонні при $BC\parallel AD$ та січній AM, тоді $\angle BAM=\angle BMA$ й трикутник ABM рівнобедрений, тобто $AB=BM$.



З трикутника ABM $(\angle B=90^\circ)$: $AB^2+BM^2=2AB^2=\left(10\sqrt{2}\right)^2$; $AB^2=\frac{200}{2}=100$; $AB=10$ см. З $\triangle ABC$ $(\angle B=90^\circ)$: $AC=\sqrt{10^2+24^2}=$ $=26$ (см); $R=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 26=13$ (см).

Відповідь. 13 см.